المملكة الأردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم

المركز الوطني لتطوير المناهج
National Center for Curriculum Development

الرياضيات

الصف الحادي عشر - المسار الأكاديمي

الفصل الدراسي الثاني

كتاب التمارين

11

فريق التأليف

د. عمر محمد أبوغليون (رئيسًا)

هبه ماهر التميمي　　يوسف سليمان جرادات　　إبراهيم عقلة القادري

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

06-5376262 / 237　　06-5376266　　P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor　　feedback@nccd.gov.jo　　www.nccd.gov.jo

قـرّرت وزارة التربيـة والتعليـم تدريـس هذا الكتـاب في مدارس المملكـة الأردنية الهاشـمية جميعها، بنـاءً على قـرار المجلس الأعلى للمركـز الوطنـي لتطوير المناهج في جلسـته رقم (2024/8)، تاريـخ 2024/10/16 م، وقرار مجلس التربية والتعليـم رقم (2024/179) تاريـخ 2024/11/17 م بـدءًا من العام الـدراسي 2024 / 2025 م.

- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan
- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

ISBN: 978 - 9923 - 41 - 797 - 3

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(2025/1/381)

بيانات الفهرسة الأولية للكتاب:

عنوان الكتاب	الرياضيات، كتاب التمارين: الصف الحادي عشر المسار الأكاديمي، الفصل الدراسي الثاني
إعداد/ هيئة	الأردن. المركز الوطني لتطوير المناهج
بيانات النشر	عمّان: المركز الوطني لتطوير المناهج، 2025
رقم التصنيف	373.19
الواصفات	/ تدريس الرياضيات/ / أساليب التدريس/ / المناهج/ / التعليم الثانوي/
الطبعة	الطبعة الثانية، مزيدة ومنقحة

يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مصنفه، ولا يعبّر هذا المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية.

التحكيم التربوي:
أ.د. خالد أبو اللوم

التصميم الجرافيكي:
راكان محمد السعدي

التحرير اللغوي:
نضال أحمد موسى
ميسرة عبد الحليم صويص

British Library Cataloguing -in- Publication Data
A catalogue record for this publication is available from the Library.

الطبعة الأولى (التجريبية) 1445 هـ / 2024 م
أعيدت طباعته 1446 هـ / 2025 م

أعزّاءنا الطلبة ...

يحتوي هذا الكتاب تمارين متنوعة أُعدت بعناية لتغنيكم عن استعمال مراجع إضافية، وهي استكمال للتمارين الواردة في كتاب الطالب، وتهدف إلى مساعدتكم على ترسيخ المفاهيم التي تتعلمونها في كل درس، وتنمي مهارتكم الحسابية.

قد يختار المعلم/ المعلمة بعض تمارين هذا الكتاب واجبًا منزليًّا، ويترك لكم البقية لتحلوها عند الاستعداد للاختبارات الشهرية واختبارات نهاية الفصل الدراسي.

تساعدكم الصفحات التي عنوانها (أستعد لدراسة الوحدة) في بداية كل وحدة على مراجعة المفاهيم التي درستموها سابقًا؛ مما يعزز قدرتكم على متابعة التعلم في الوحدة الجديدة بسلاسة ويسر.

يوجد فراغ كافٍ إزاء كل تمرين لكتابة إجابته، وإذا لم يتسع هذا الفراغ لخطوات الحل جميعها فيمكنكم استعمال دفتر إضافي لكتابتها بوضوح.

متمنين لكم تعلمًا ممتعًا وميسّرًا.

المركز الوطني لتطوير المناهج

قائمة المحتويات

الوحدة 4 الاقترانات المثلثية

أستعدّ لدراسة الوحدة **6**

الدرس 1 قياس الزاوية بالراديان 11

الدرس 2 الاقترانات المثلثية 12

الدرس 3 تمثيل الاقترانات المثلثية بيانيًّا 14

الوحدة 5 التكامل

أستعد لدراسة الوحدة **15**

الدرس 1 التكامل غير المحدود 21

الدرس 2 الشرط الأوَّلي 22

الدرس 3 التكامل المحدود 23

الدرس 4 المساحات والحجوم 24

قائمة المحتويات

الوحدة 6 الاقترانات الأُسّية واللوغاريتمية

أستعد لدراسة الوحدة **26**

الدرس 1 الاقترانات الأُسِّية 28

الدرس 2 النمو والاضمحلال الأُسِّي 29

الدرس 3 الاقترانات اللوغاريتمية 30

الدرس 4 قوانين اللوغاريتمات 31

الدرس 5 المعادلات الأُسِّية واللوغاريتمية 32

أوراق الرسم البيانيّ 33

الوحدة 4: الاقترانات المثلثية

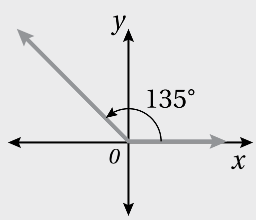
أختبر معلوماتي بحلّ التدريبات أوّلًا، وفي حال عدم تأكُّدي من الإجابة أستعين بالمثال المعطى.

رسم الزاوية في الوضع القياسي (الدرس 1)

أرسم في الوضع القياسي الزاوية المعطى قياسها في ما يأتي، وأحدّد الربع أو المحور الذي تقع عليه:

1) $150°$ 2) $240°$ 3) $290°$ 4) $180°$

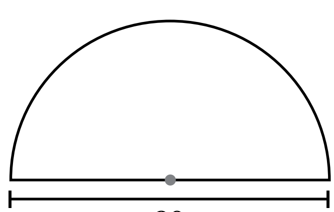
مثال: أرسم الزاوية $135°$ في الوضع القياسي، وأحدّد الربع أو المحور الذي تقع عليه:

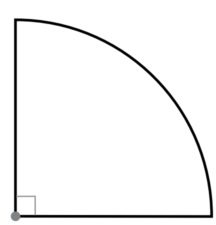


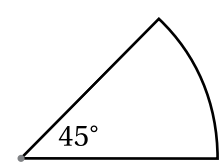
أرسم المحورين الإحداثيين. ومن نقطة الأصل أرسم ضلع الابتداء مُنطبِقًا على محور x الموجب، ثم أضع مركز المنقلة على نقطة الأصل، وأضع تدريج المنقلة $0°$ على ضلع الابتداء، ثم أُعيِّن نقطةً مقابل التدريج $135°$. بعد ذلك أرسم ضلع الانتهاء من نقطة الأصل إلى النقطة الثابتة التي عيَّنْتُها، فأجد أنَّ ضلع انتهاء الزاوية يقع في الربع الثاني.

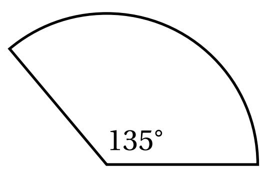
إيجاد طول القوس ومساحة القطاع الدائري (الدرس 1)

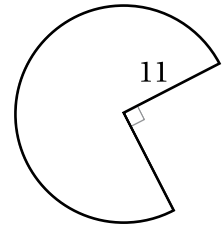
أجد طول القوس ومساحة القطاع في كلّ من الأشكال الآتية (أكتب الإجابة بدلالة π):

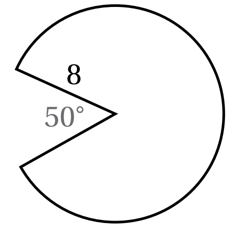
5)


6)


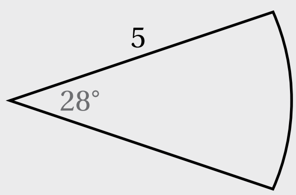
7)


8)


9)


10)


مثال: أجد طول القوس ومساحة القطاع في الشكل المجاور (أكتب الإجابة بدلالة π).



زاوية القطاع هي °28، وطول نصف القطر هو 5 وحدات طول:

قانون طول القوس $l = \frac{\theta}{360°} \times 2\pi r$

بتعويض $\theta = 28°, r = 5$ $l = \frac{28°}{360°} \times \pi \times 2 \times 5$

باستعمال الآلة الحاسبة ≈ 2.4

إذن، طول هذا القوس مقرَّبًا إلى أقرب منزلة عشرية واحدة هو: 2.4 وحدة طول.

قانون مساحة القطاع $A = \frac{\theta}{360°} \times \pi r^2$

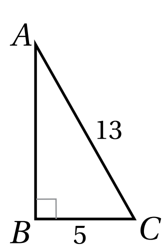
بتعويض $r = 5, \theta = 28°$ $= \frac{28°}{360°} \times \pi \times 5^2$

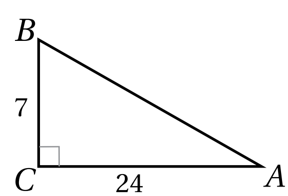
بالتبسيط $= \frac{35}{18}\pi$

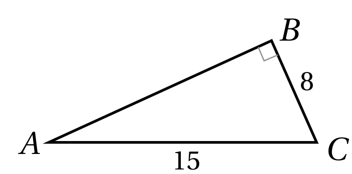
إذن، مساحة هذا القطاع هي: $\frac{35}{18}\pi$ وحدة مربعة.

إيجاد النسب المثلثية لزوايا في المثلث قائم الزاوية (الدرس 2)

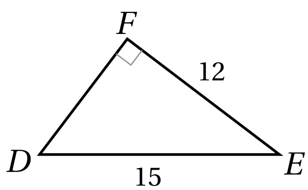
أجد قِيَم النسب المثلثية الثلاث للزاوية A في كلّ مما يأتي، وأترك إجابتي في صورةِ كسر:

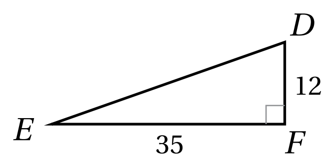
11


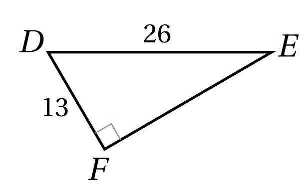
12


13


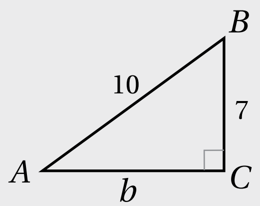
أجد قِيَم النسب المثلثية الثلاث للزاوية E في كلّ ممّا يأتي، وأترك إجابتي في صورة كسر:

14


15


16


مثال: أجد قِيَم النسب المثلثية الثلاث للزاوية A في المثلث المجاور، وأترك إجابتي في صورة كسر.



الخطـوة 1 أستعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد b.

نظرية فيثاغورس	$a^2 + b^2 = c^2$
بتعويض $a = 7, c = 10$	$7^2 + b^2 = 10^2$
بالتبسيط	$49 + b^2 = 100$
بطرح 49 من طرفي المعادلة	$b^2 = 51$
بأخذ الجذر التربيعيّ لطرفي المعادلة	$b = \pm\sqrt{51}$

بما أنّ الطول لا يمكن أنْ يكون سالبًا، فإنّ $b = \sqrt{51}$.

الخطـوة 2 أجد النسب المثلثية الثلاث.

$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{7}{\sqrt{51}}$ | $\cos A = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{51}}{10}$ | $\sin A = \frac{a}{c} = \frac{7}{10}$

- **إيجاد النسب المثلثية الأساسية باستعمال دائرة الوحدة** (الدرس 2)

أجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي، التي يقطع ضلع انتهائها دائرة الوحدة في النقطة الواردة في ما يأتي:

19) $P(1, 0)$

18) $P\left(-\frac{12}{13}, \frac{5}{13}\right)$

17) $P\left(-\frac{8}{17}, \frac{15}{17}\right)$

مثال: أجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي، التي يقطع ضلع انتهائها دائرة الوحدة في النقطة الواردة في ما يأتي:

a) $P(-0.6, 0.8)$

$\sin\theta = y = 0.8,\quad \cos\theta = x = -0.6,\quad \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{0.8}{-0.6} = -\frac{4}{3}$

b) $P\left(\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right)$

$\sin\theta = y = -\frac{12}{13},\quad \cos\theta = x = \frac{5}{13},\quad \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-12/13}{5/13} = -\frac{12}{5}$

إيجاد قِيَم النسب المثلثية للزوايا ضمن الدورة الواحدة (الدرس 2)

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

20) $\cos 120°$

21) $\sin 225°$

22) $\tan 330°$

23) $\cos 315°$

24) $\tan 240°$

25) $\sin 210°$

مثال: أجد قيمة $\sin 120°$.

$\theta' = 180° - \theta$ بإيجاد قياس الزاوية المرجعية

$= 180° - 120°$ بتعويض $\theta = 120°$

$= 60°$ بالطرح

$\sin 120° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ الجيب موجب في الربع الثاني

تمثيل اقترانَي الجيب وجيب التمام والظل (الدرس 3)

أرسم منحنى الاقتران لكلّ ممّا يأتي في الفترة المعطاة، ثمّ أصفه:

26) $y = \sin x,\quad 0° \le x \le 270°$

27) $y = \cos x,\quad 0° \le x \le 180°$

28) $y = \sin x,\quad 0° \le x \le 180°$

29) $y = \tan x,\quad 0° \le x \le 180°$

مثال: أرسم منحنى الاقتران $y = \sin x$، ثمّ أصفه، علمًا بأن $0° \leq x \leq 360°$

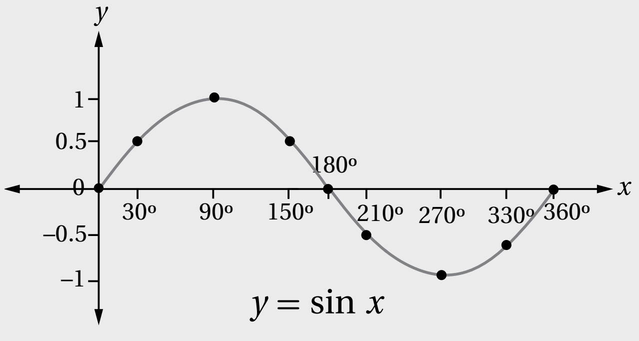
الخطـوة 1 أكوّن جدولًا أكتب فيه زوايا شائعة، نِسـبُها المثلثية معروفة، مثل: الزوايا الربعية، والزوايا التي زاويتها المرجعية $30°$

الخطـوة 2 أجد قيمة $\sin x$ لكلّ زاوية x، ثم أكتبها في الجدول:

x	$0°$	$30°$	$90°$	$150°$	$180°$	$210°$	$270°$	$330°$	$360°$
$y = \sin x$	0	0.5	1	0.5	0	– 0.5	–1	– 0.5	0

الخطـوة 3 أُعيِّـن الأزواج المُرتَّبـة: $(0°, 0), (30°, 0.5), (90°, 1), ...(360°, 0)$ في المسـتوى الإحداثيّ.

الخطـوة 4 أصل بمنحنى متصل بين النقاط، فينتج رسم كما في الشكل الآتي.



من التمثيل البياني لاقتران $\sin x$، ألاحظ أن أكبر قيمة للاقتران $\sin x$ هي 1، وأصغر قيمة له هي -1

قياس الزاوية بالراديان
Angle Measure in Radian

أُحوِّل قياس الزاوية المكتوب بالدرجات إلى الراديان، وقياس الزاوية المكتوب بالراديان إلى الدرجات في كلٍّ ممّا يأتي:

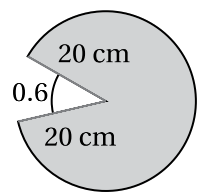
1 $225°$

2 $840°$

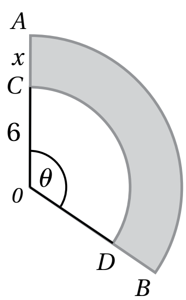
3 $\frac{11\pi}{6}$

4 $-\frac{23\pi}{4}$

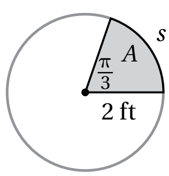
5 أجد مساحة القطاع الدائري المُظلَّل في الشكل المجاور.

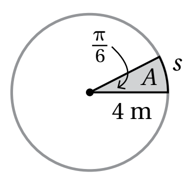


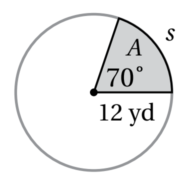
6 يُبيِّن الشكل المجاور قطاعين دائريين مركزهما O. إذا كان: $OC = 6$ cm، و $CA = x$ cm، و $m\angle\theta = 2$، وكانت مساحة المنطقة المُظلَّلة 64 cm^2، فأجد قيمة المُتغيِّر x.



أجد طول القوس ومساحة القطاع في كلٍّ ممّا يأتي، وأقرِّب إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة:

7


8


9


10 إذا كانت مساحة دائرة 72 cm^2، فأجد مساحة قطاع دائري من هذه الدائرة يقابل زاوية مركزية قياسها $\frac{\pi}{6}$.

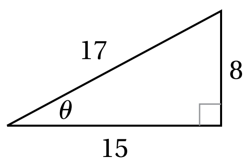
11 قطاع دائري نصف قُطْره 24 cm، ومساحته 288 cm^2. أجد الزاوية المركزية لهذا القطاع.

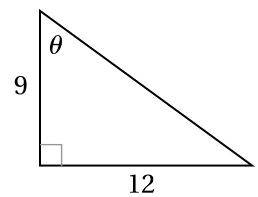
12 **رافعة:** يبلغ طول نصف القُطْر لبكرة رافعة 2 ft، وهي تُستعمَل لرفع الأحمال الثقيلة، وتؤدي 8 دورات كل 15 ثانية. أجد السرعة الخطية والسرعة الزاويَّة للرافعة.

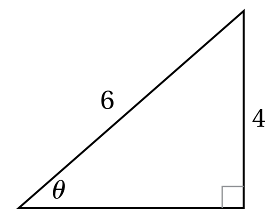
الدرس 2

الاقترانات المثلثية
Trigonometric Functions

أجد قيم الاقترانات المثلثية الستة للزاوية θ في كلّ مما يأتي:

1 

2 

3 

تقع النقطة المعطاة في كلّ مما يأتي على ضلع انتهاء الزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي. أجد قيم الاقترانات المثلثية الستة للزاوية θ:

4 $(-6, 6)$

5 $(5, -3)$

6 $(-8, 15)$

أجد قيمة كلّ مما يأتي:

7 $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

8 $\cos\frac{7\pi}{6}$

9 $\tan\frac{13\pi}{6}$

10 $\sec(-150^\circ)$

11 $\cot\frac{4\pi}{3}$

12 $\sin 300^\circ$

أجد قيمة كلّ من الاقترانات المثلثية الخمسة المتبقية للزاوية θ في كلّ مما يأتي:

13 $\csc\theta = 2, \cos\theta < 0$

14 $\cot\theta = 1, \sin\theta > 0$

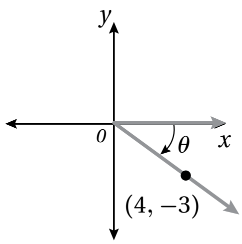
15 $\sin\theta = -\frac{1}{5}, \cos\theta > 0$

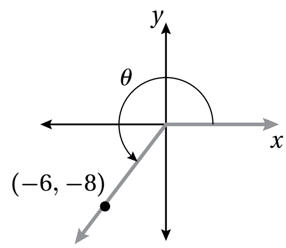
16 $\sec\theta = \sqrt{3}, \sin\theta < 0$

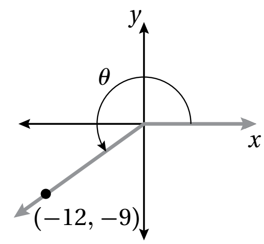
الدرس 2

الاقترانات المثلثية
Trigonometric Functions

أجد قِيَم الاقترانات المثلثية الستة للزاوية θ في كلٍّ ممّا يأتي:

17 

18 

19 

إذا كان: $f(x) = \sin x, g(x) = \cos x, h(x) = 2x$، فأجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

20 $f\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+f\left(\frac{4\pi}{3}\right)+f\left(\frac{\pi}{6}\right)$

21 $(h \circ g)\left(\frac{17\pi}{3}\right)$

22 $(h \circ f)\left(\frac{11\pi}{4}\right)$

إذا كان $\sin 70° = \cos 20° = 0.940$ لأقرب ثلاث منازل عشرية، فأستعمل هذه الحقيقة لإيجاد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

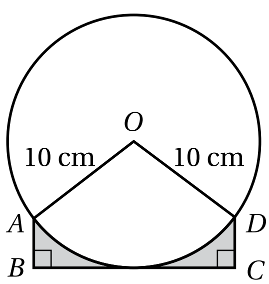
23 $\cos 560°$

24 $\sin 430°$

25 $\sin 470°$

26 $\cos(-380°)$

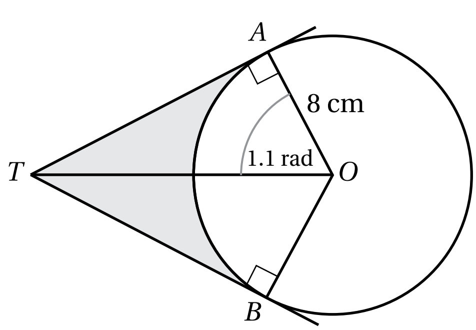
يُبيِّن الشكل المجاور دائرة مركزها O، وطول نصف قُطْرها 10 cm، إذا كان $\overline{BC}$ مماسًّا للدائرة طوله 16 cm، و $DC = AB$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:



27 $m\angle AOD$ بالراديان.

28 مساحة المنطقة المُظلَّلة.

يُبيِّن الشكل المجاور دائرة مركزها O، وطول نصف قُطْرها 8 cm، إذا كان $\overline{TA}$ و $\overline{TB}$ مماسَّين للدائرة، وكان $m\angle AOT = 1.1$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:



29 طول TA.

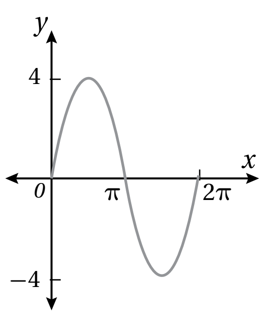
30 مساحة الجزء المُظلَّل في الشكل.

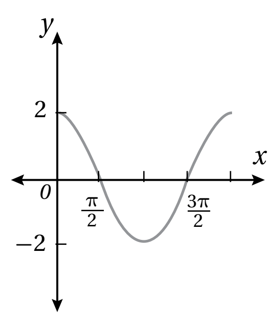
تمثيل الاقترانات المثلثية بيانيًّا
Graphing Trigonometric Functions

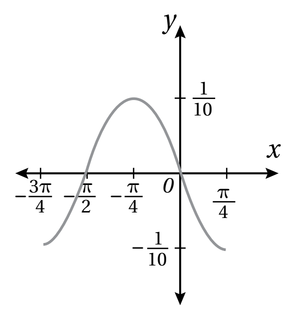
أجد طول الدورة والسعة (إن وُجِدَت) لكلّ اقتران ممّا يأتي، ثم أُمثِّله بيانيًّا:

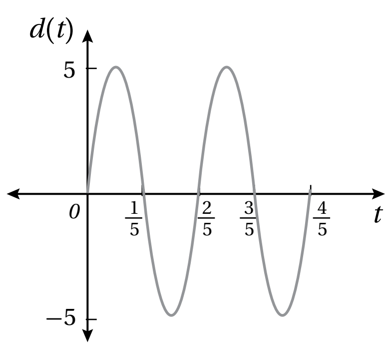
1) $g(x) = 2 + \sin x$
2) $g(x) = 5 - \cos x$
3) $g(x) = -\cos(x + \pi)$
4) $g(x) = 5 - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
5) $g(x) = -2 - \sin(x - \pi)$
6) $g(x) = 3 + \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$
7) $g(x) = -4 \sin \frac{1}{4} x$
8) $g(x) = 2 - \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
9) $g(x) = \frac{1}{2} \tan \pi x$

أجد السعة وطول الدورة لكل اقتران ممّا يأتي، ثم أكتب معادلة في صورة: $y = a \sin b(x-c)$، أو صورة: $y = a \cos b(x-c)$ لتمثيل قاعدة الاقتران:

10)


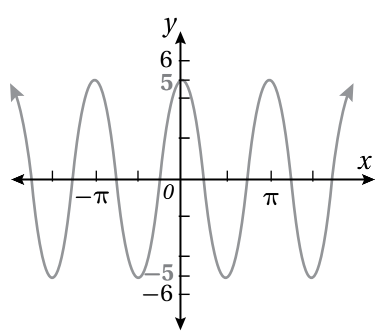
11)


12)




13) يُمثِّل الشكل المجاور الإزاحة $d(t)$ بالسنتيمتر مع الزمن t لكتلة مُعلَّقة بزنبرك نابضي، وهي تتحرَّك إلى الأعلى وإلى الأسفل في حركة توافقية بسيطة. أكتب قاعدة الاقتران d، حيث $d(t) = a \sin \omega t$.

أتأمَّل الشكل المجاور، ثم أُجيب عن السؤالين الآتيين:



14) هل يُمثِّل المنحنى الاقترانَ الذي صورته $y = a \sin bx$، أو صورته $y = a \cos bx$؟ أُبرِّر إجابتي.

15) أجد القيمة العظمى، والقيمة الصغرى، وطول الدورة، والسعة للاقتران.

الوحدة 5: التكامل

أختبر معلوماتي بحلّ التدريبات أوّلًا، وفي حال عدم تأكُّدي من الإجابة أستعين بالمثال المعطى.

مشتقة اقتران القوَّة (الدرس 1)

أجد مشتقة كلٍّ ممّا يأتي:

1) $y = 2x^4 - 5x^2 + 7$

2) $y = \sqrt{x}$

3) $y = x + \sqrt[5]{2x}$

4) $y = \frac{1-4x}{x^2}$

5) $y = 8x - \frac{1}{2x}$

6) $y = (2x-3)(3x+5)$

مثال: أجد مشتقة الاقتران: $y = \frac{6x-8}{x^2}$.

بكتابة الاقتران في صورة فرق بين كسرين: $y = \frac{6x-8}{x^2} = \frac{6x}{x^2} - \frac{8}{x^2}$

بكتابة الاقتران في صورة أُسِّية: $= 6x^{-1} - 8x^{-2}$

قاعدتا مشتقة مضاعفات القوَّة، والفرق: $\frac{dy}{dx} = -6x^{-2} + 16x^{-3}$

تعريف الأُسِّ السالب: $= \frac{-6}{x^2} + \frac{16}{x^3}$

تحويل المقادير من الصورة الجذرية إلى الصورة الأسّيّة، وبالعكس (الدرس 1)

أكتب الصورة الأُسّية في صورة جذرية والصورة الجذرية في صورة أُسّية في كلّ مما يأتي:

7) $c^{\frac{1}{8}}$

8) $\sqrt[9]{x}$

9) $25^{\frac{1}{10}}$

10) $\sqrt[3]{-12}$

11) $\sqrt[5]{x^3}$

12) $(m)^{\frac{-2}{7}}$

13) $(6b^5)^{\frac{1}{3}}$

14) $\sqrt{\frac{100}{y^4}}$

مثال: أكتب الصورة الأُسّية في صورة جذرية والصورة الجذرية في صورة أُسّية في كلّ مما يأتي:

a) $z^{\frac{1}{9}}$

$z^{\frac{1}{9}} = \sqrt[9]{z}$ تعريف $a^{\frac{1}{n}}$

b) $\sqrt[11]{w}$

$\sqrt[11]{w} = w^{\frac{1}{11}}$ تعريف $a^{\frac{1}{n}}$

c) $16^{\frac{-7}{5}}$

$\frac{1}{16^{\frac{7}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{16^7}}$ تعريف الأسس السالبة، وتعريف $a^{\frac{m}{n}}$

d) $\sqrt[7]{-35}$

$\sqrt[7]{-35} = (-35)^{\frac{1}{7}}$ تعريف $a^{\frac{1}{n}}$

ضرب المقادير الجبرية (الدرس 1)

أجد ناتج ضرب كلّ مما يأتي في أبسط صورة:

15. $(x-3)(x+5)$
16. $(12-4x)(1+2x)$
17. $(2x-5)(4x-8x^2)$
18. $(3x+4)^2$
19. $(x^2+7)^2$
20. $(3x-1)(3x+1)$

مثال: أجد ناتج ضرب $(2x+1)(3x-4)$ في أبسط صورة:

بفصل المقدار $(2x+1)$ إلى حدّين ثمّ ضرب كلّ منهما في $(3x-4)$	$(2x+1)(3x-4) = 2x\,(3x-4) + 1\,(3x-4)$
باستعمال خاصية التوزيع	$= 6x^2 - 8x + 3x - 4$
بجمع الحدود المتشابهة	$= 6x^2 - 5x - 4$

إيجاد قيمة اقتران عند قيمة معطاة (الدرس 2)

إذا كانَ $f(x) = 3x-2$، وَ $g(x) = x^2 - 2x - 3$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

24 $g(-4)$ **23** $f(-3)$ **22** $f(2)$ **21** $g(0)$

مثالٌ: إذا كانَ $g(x) = 2x^2 + 5x + 4$، فأَجِدُ $g(-2)$

قاعدةُ الاقترانِ	$g(x) = 2x^2 + 5x + 4$
بتعويضِ $x = -2$	$g(-2) = 2(-2)^2 + 5(-2) + 4$
بالتبسيطِ	$= 8 - 10 + 4 = 2$

الموقع والسرعة والتسارع للجسم المتحرك في مسار مستقيم (الدرس 2)

يمثل الاقتران $s(t) = t^3 - 6t + 3$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s موقع الجسم بالأمتار بعد t ثانية:

25 أجد الاقتران $v(t)$ الذي يمثل سرعة الجسم في أيّ لحظة (t ثانية).

26 أجد سرعة الجسم عندما $t = 3$.

27 أجد الزمن t عندما تكون السرعة 6 m/s

28 أجد الاقتران $a(t)$ الذي يمثل تسارع الجسم، حيث t الزمن بالثانية.

29 أجد تسارع الجسم عندما $t = 5$.

مثال: يمثّل الاقتران $s(t) = t^3 - 3t^2 + 4t, t \geq 0$ موقع جســم يتحرك في مســار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

a) ما سرعة الجسم عندما $t = 2$ ؟

اقتران السرعة	$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t + 4$
بتعويض $t = 2$	$v(2) = 3(2)^2 - 6(2) + 4$
بالتبسيط	$= 4$

إذن، سرعة الجسم عندما $t = 2$ هي: 4 m/s

b) ما تسارع الجسم عندما $t = 2$؟

أجد مشتقّة اقتران السرعة، ثم أُعوِّض $t = 2$ في المشتقّة:

اقتران التسارُع	$a(t) = v'(t) = s''(t) = 6t - 6$
بتعويض $t = 2$	$a(2) = 6(2) - 6$
بالتبسيط	$= 6$

إذن، تسارع الجسم عندما $t = 2$ هو: 6 m/s^2

إعادة تعريف اقتران القيمة المُطلَقة (الدرس 3)

أُعيد تعريف كلّ من الاقترانات الآتية:

31) $f(x) = |1 - 4x| + 3$

30) $f(x) = |2x + 5|$

مثال: **أُعيد تعريف اقتران القيمة المُطلَقة:** $f(x) = |3x + 6|$.

الخطوة 1: أساوي ما في داخل رمز القيمة المُطلَقة بالصفر ثم أحلّ المعادلة الناتجة.

بمساواة ما في داخل رمز القيمة المُطلَقة بالصفر $3x + 6 = 0$

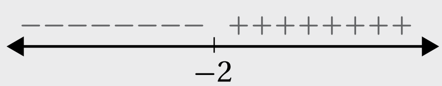
بطرح 6 من طرفي المعادلة $3x + 6 - 6 = 0 - 6$

بقسمة طرفي المعادلة على 3 $\frac{3x}{3} = \frac{-6}{3}$

بالتبسيط $x = -2$

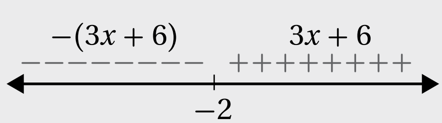
الخطوة 2: أُعيِّن جذر المعادلة على خط الأعداد، ثم أُحدِّد الإشارة على جانبيه.

أُعيِّن العدد -2 على خط الأعداد، ثم أُحدِّد الإشارة على جانبيه بتعويض أيِّ قيمة أقل من -2 في المقدار الجبري: $3x + 6$، فيكون دائمًا ناتج التعويض سالبًا؛ ما يعني أنَّ إشارة المقدار سالبة يسار العدد -2. بعد ذلك أُعوِّض أيَّ قيمة أكبر من -2 في المقدار الجبري: $3x + 6$، فيكون دائمًا ناتج التعويض موجبًا؛ ما يعني أنَّ إشارة المقدار موجبة يمين العدد -2:



الخطوة 3: أكتب قاعدتي الاقتران بحسب إشارة يمين جذر المعادلة ويساره.

أكتب ما في داخل القيمة المُطلَقة كما هو في الجزء الموجب، ثم أكتب في الجزء السالب ما في داخل القيمة المُطلَقة مضروبًا في -1:



الخطوة 4: أكتب قاعدة الاقتران المُتشعِّب.

$$f(x) = \begin{cases} -3x - 6 & , x < -2 \\ 3x + 6 & , x \geq -2 \end{cases}$$

التمثيل البياني للاقترانات والتحويلات الهندسية (الدرس 4)

أستعمل منحنى الاقتران الرئيس: $f(x) = x^2$ لتمثيل كلٍّ من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

34) $q(x) = x^2 + 5$

33) $h(x) = (x - 5)^2$

32) $g(x) = x^2 - 5$

37) $p(x) = \frac{1}{5}x^2$

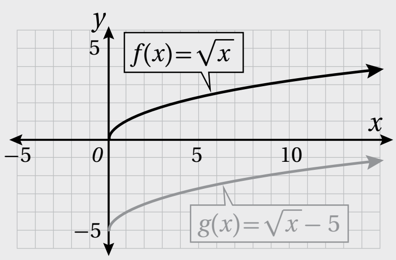
36) $r(x) = 5x^2$

35) $t(s) = (x + 5)^2$

مثال: أستعمل منحنى الاقتران الرئيس: $f(x) = \sqrt{x}$ لتمثيل كلٍّ من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

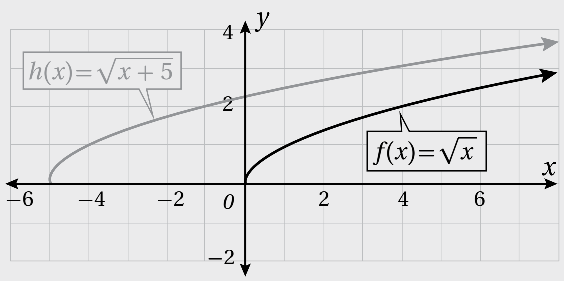
1) $g(x) = \sqrt{x} - 5$

منحنى الاقتران: $g(x) = \sqrt{x} - 5$ هو منحنى الاقتران: $f(x) = \sqrt{x}$ مزاحًا 5 وحدات إلى الأسفل؛ لذا فإنَّ الإحداثي y لكل نقطة على منحنى g يقل بمقدار 5 وحدات عن الإحداثي y للنقطة المقابلة لها على منحنى الاقتران f كما في الشكل المجاور.



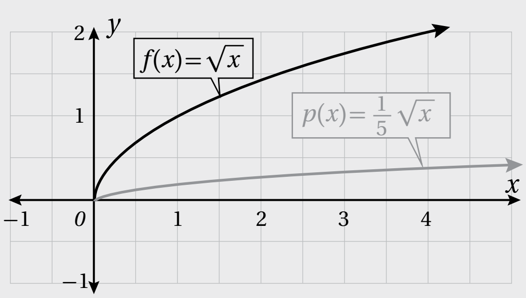
2) $h(x) = \sqrt{x + 5}$

منحنى الاقتران: $h(x) = \sqrt{x + 5}$ هو منحنى الاقتران: $f(x) = \sqrt{x}$ مزاحًا 5 وحدات إلى اليسار؛ لذا فإنَّ الإحداثي x لكل نقطة على منحنى h يقل بمقدار 5 وحدات عن الإحداثي x للنقطة المقابلة لها على منحنى الاقتران f كما في الشكل المجاور.



3) $p(x) = \frac{1}{5}\sqrt{x}$

منحنى الاقتران: $p(x) = \frac{1}{5}\sqrt{x}$ هو تضييق رأسي لمنحنى الاقتران: $f(x) = \sqrt{x}$ بمعامل مقداره $\frac{1}{5}$؛ لذا فإنَّ الإحداثي y لكل نقطة على منحنى الاقتران p ناتج من ضرب الإحداثي y للنقطة المقابلة لها في الاقتران $f(x)$ في $\frac{1}{5}$ كما في الشكل المجاور.



التكامل غير المحدود
Indefinite Integrals

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1. $\int (5x-1)\,dx$
2. $\int 2x^{-4}\,dx$
3. $\int (6x^2-4x)\,dx$
4. $\int (3-x-2x^5)\,dx$
5. $\int \left(x^{-2}+x^{5/2}\right)dx$
6. $\int \left(3x^2-\frac{2}{x^2}\right)dx$
7. $\int (3x^{-2}+6x^{-1/2}+x-4)\,dx$
8. $\int \left(10x^4+8x^{-3}\right)dx$
9. $\int \left(\frac{2}{x^3}-3\sqrt{x}\right)dx$
10. $\int \left(8x^3+6x-\frac{4}{\sqrt{x}}\right)dx$
11. $\int \left(\frac{7}{x^2}+\sqrt[3]{x^4}\right)dx$
12. $\int \left(\frac{x^2}{3}+\frac{3}{x^2}\right)dx$

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

13. $\int \frac{4+2\sqrt{x}}{x^2}\,dx$
14. $\int \frac{4-x^2}{2+x}\,dx$
15. $\int \frac{x^2-1}{x^2}\,dx$
16. $\int x\sqrt{x}\,dx$
17. $\int \frac{x^2-64}{2x+16}\,dx$
18. $\int x^2(1-x^3)\,dx$
19. $\int (x+4)^2\,dx$
20. $\int \frac{5-x}{x^5}\,dx$
21. $\int \frac{x^2+2x+1}{x+1}\,dx$
22. $\int x(x+1)^2\,dx$
23. $\int \frac{(x+3)^2}{\sqrt{x}}\,dx$
24. $\int (x-5)(x+5)\,dx$

الشرط الأوَّلي
Initial Condition

في كلٍّ ممّا يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y = f(x)$. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

1. $f'(x) = 3x - 2; (-1, 2)$
2. $f'(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}; (4, 5)$
3. $f'(x) = -x(x+1); (-1, 5)$
4. $f'(x) = x^3 - \dfrac{2}{x^2} + 2; (1, 3)$
5. $f'(x) = x + \sqrt{x}; (1, 2)$
6. $f'(x) = -\dfrac{10}{x^2}; (1, 15)$

7. إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ هو: $f'(x) = \sqrt{x}$، فأجد قاعدة الاقتران $f(x)$، علمًا بأنَّ منحناه يمرُّ بالنقطة $(9, 25)$.

8. إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{x^2}$ ، فأجد قاعدة العلاقة y، علمًا بأنَّ منحناها يمرُّ بالنقطة $(2, 4)$.

9. إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو: $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 - 12x + 8$، ومَرَّ منحناها بنقطة الأصل، فأجد الإحداثي x لجميع نقاط تقاطع منحنى العلاقة مع المحور x، وأبرّر إجابتي.

10. **الإيراد الحدِّي:** يُمثِّل الاقتران: $R'(x) = x^2 - 3$ الإيراد الحدِّي (بالدينار) لكل قطعة تباع من مُنتَجات إحدى الشركات، حيث x عدد القطع المَبيعة، و$R(x)$ إيراد بيع x قطعة بالدينار. أجد اقتران الإيراد $R(x)$، علمًا بأنَّ $R(0) = 0$.
إرشاد: يُمثِّل الإيراد الحدِّي مشتقة اقتران الإيراد.

11. يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته بالاقتران: $v(t) = 3t^2 - 12t + 11$، حيث t الزمن بالثواني، وv سرعته بالمتر لكل ثانية. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد ثانيتين من بَدْء الحركة.

12. يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، ويعطى تسارعه بالاقتران: $a(t) = 6t - 30$، حيث t الزمن بالثواني، وa التسارع بالمتر لكل ثانية تربيع. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل بسرعة مقدارها $72\ m/s$، فأجد موقعه بعد 3 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

التكامل المحدود
Definite Integral

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

1 $\int_{1}^{5} 10x^{-2}\, dx$

2 $\int_{0}^{2} (2x^3 - 4x + 5)\, dx$

3 $\int_{1}^{4} \frac{x^3 + 2x^2}{\sqrt{x}}\, dx$

4 $\int_{3}^{6} \left(x - \frac{3}{x}\right)^2 dx$

5 $\int_{0}^{5} (|x+3| - 5)\, dx$

6 $\int_{0}^{6} x(6-x)\, dx$

7 $\int_{1}^{2} (6x - \frac{12}{x^4} + 3)\, dx$

8 $\int_{0}^{7} |2x - 1|\, dx$

9 $\int_{-3}^{4} |6 - 2x|\, dx$

10 $\int_{1}^{2} \frac{x^2 + x^3}{x}\, dx$

11 $\int_{3}^{4} (6x^2 - 4x)\, dx$

12 $\int_{10}^{10} \frac{x+1}{x^2}\, dx$

إذا كان: $\int_{-3}^{2} g(x)\, dx = -2$, $\int_{-3}^{1} f(x)\, dx = 4$, $\int_{-3}^{2} f(x)\, dx = 5$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

13 $\int_{2}^{2} f(x)\, dx$

14 $\int_{1}^{2} (f(x) - 5)\, dx$

15 $\int_{-3}^{2} \big(-2f(x) + 5g(x)\big) dx$

16 $\int_{2}^{-3} \big(g(x) + 2x\big)\, dx$

17 $\int_{2}^{-3} \big(f(x) + g(x)\big)\, dx$

18 $\int_{-3}^{2} \big(4f(x) - 3g(x)\big)\, dx$

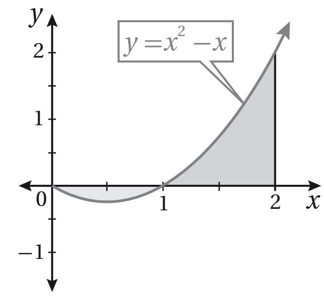
19 إذا كان: $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x < 2 \\ 8 - x & , x \geq 2 \end{cases}$، فأجد قيمة: $\int_{-3}^{6} f(x)\, dx$.

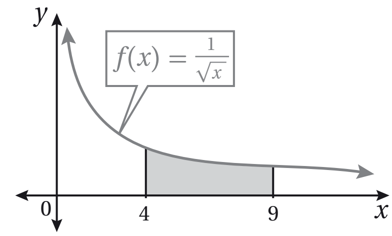
20 **سكّان:** أشارت دراسة إلى أنَّ عدد السكّان في إحدى القرى يتغيَّر شهريًّا بمُعدَّلٍ يُمكِن نمذجته بالاقتران: $P'(t) = 5 + 3t^{2/3}$، حيث t عدد الأشهر من الآن، و $P(t)$ عدد السكّان. أجد مقدار الزيادة في عدد سكّان القرية في الأشهر الثمانية القادمة.

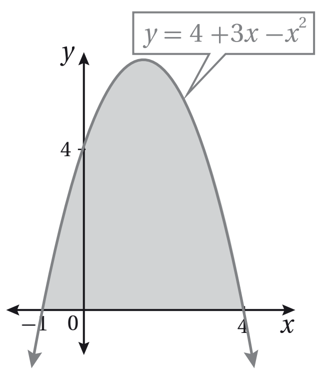
21 إذا كان: $\int_{2}^{3} (x^2 - a)\, dx = 5$، فأجد قيمة الثابت a.

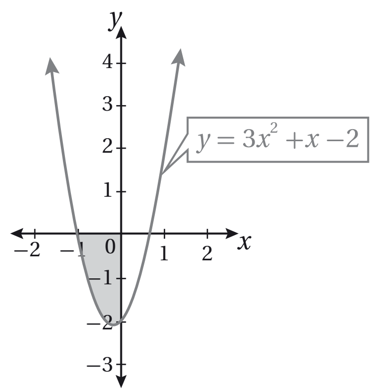
المساحات والحجوم
Areas and Volumes

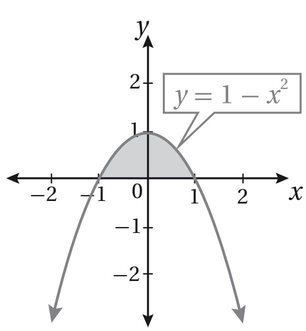
أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ من التمثيلات البيانية الآتية:

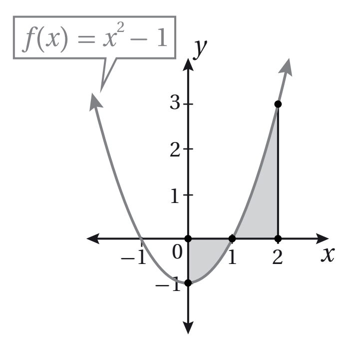
1


2


3


4


5


6


7 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 3x^2 - 3$، والمحور x.

8 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^3 - 5x^2 - 6x$، والمحور x.

9 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 (2 - x)$، والمحور x.

المساحات والحجوم

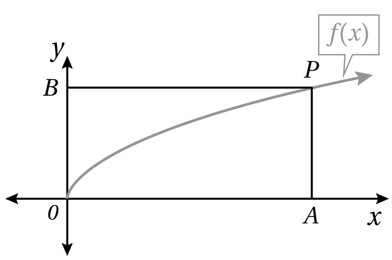
Areas and Volumes

10 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 4x - x^2$، والمحور x.

11 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 + 1$، والمحور x، والمستقيمين: $x = -2$ و $x = 3$.

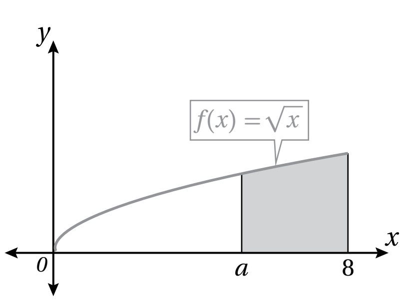
12 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$، والمحور x.

13 يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $f(x) = \sqrt{x}, x > 0$. إذا علمْتُ أنَّ النقطة P تقع على منحنى الاقتران، فأُثبِت أنَّ مساحة المنطقة OPA المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$ والمحور x تساوي ثلثي مساحة المستطيل $OAPB$.



14 أجد حجم المجسَّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = x^2 + 5$، والمحورين الإحداثيين، والمستقيم $x = 3$، حول المحور x.

15 دارت المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = \sqrt{x}$، والمحور x، والمستقيمين $x = 0$، و $x = 8$، حول المحور x. إذا كان حجم جزء المجسَّم الواقع إلى يمين $x = a$ يساوي حجم الجزء الواقع إلى يسارها، فأجد قيمة a.



الوحدة 6: الاقترانات الأُسّية واللوغاريتمية

أختبر معلوماتي بحلّ التدريبات أوّلًا، وفي حال عدم تأكُّدي من الإجابة أستعين بالمثال المعطى.

• إيجاد قيمة أعداد مكتوبة بالصيغة الأُسّية (الدرس 1)

أكتب كلًّا مما يأتي بالصيغة القياسية، ثم أجد قيمته:

1) $(-4)^3$ 2) 2^6 3) $(-15)^2$ 4) 103^1 5) 23^0

6) 0^{11} 7) 90^2 8) 50^3 9) 100^5 10) 5.1^2

مثال: أكتب كلًّا مما يأتي بالصيغة القياسية، ثم أجد قيمته:

a) 2^5

$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ الصيغة القياسية

$= 32$ بالضرب

b) $(-4)^3$

$(-4)^3 = -4 \times -4 \times -4$ الصيغة القياسية

$= -64$ بالضرب

c) $(-5)^2$

$(-5)^2 = -5 \times -5$ الصيغة القياسية

$= 25$ بالضرب

d) 5^0

$5^0 = 1$ تعريف الأُسّ الصفري

e) $(-8)^0$

$(-8)^0 = 1$ تعريف الأُسّ الصفري

حلّ المعادلات الأُسّية (الدرس 1)

أحلّ كلًّا من المعادلات الأُسّية الآتية:

11) $2^{x-1} = 16$

12) $(\frac{1}{2})^{x} = 2^{8}$

13) $(\frac{1}{8})^{-y} = \frac{1}{512}$

14) $4^{x-5} = 32^{2x+1}$

15) $9^{x} = 3 \times (\frac{1}{3})^{x}$

16) $625^{2x+1} = \frac{5}{\sqrt{5}}$

مثال: أحلّ المعادلة الأُسّية $3 \times 9^x = 243$

المعادلة الأصلية	$3 \times 9^x = 243$
$9 = 3^2 , 243 = 3^5$	$3 \times 3^{2x} = 3^5$
بضرب القوى	$3^{2x+1} = 3^5$
بمساواة الأُسس	$2x + 1 = 5$
بحلّ المعادلة الخطّية الناتجة	$x = 2$

إيجاد قيم مقادير أسية (الدرس 3)

أستعمل قوانين الأسس لإيجاد قيمة كلّ مما يأتي:

17) $(2^4)^3$

18) $\frac{5^2}{5^5}$

19) $(7-4)^3 \times 3^{-8}$

مثال: أستعمل قوانين الأسس لإيجاد قيمة كلّ مما يأتي:

a) $(10^3)^2$

قاعدة قوّة القوّة	$(10^3)^2 = 10^{3\times2}$
بضرب الأسس	$= 10^6$
تعريف الأسس	$= 1000000$

b) $\frac{4^2}{4^5}$

قاعدة قسمة القوى	$\frac{4^2}{4^5} = 4^{2-5}$
بطرح الأسس	$= 4^{-3}$
تعريف الأسس السالبة	$= \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$

الاقترانات الأُسِّية

Exponential Functions

أجد قيمة كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

1 $f(x) = (13)^x,\ x = 2$

2 $f(x) = 4(5)^x,\ x = 3$

3 $f(x) = 7\left(\frac{1}{2}\right)^x,\ x = 3$

4 $f(x) = -(3)^x + 7,\ x = 4$

5 $f(x) = -(2)^x + 1,\ x = 6$

6 $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x - 12,\ x = 3$

أُمثِّل كل اقتران ممّا يأتي بيانيًّا، ثم أحدّد مجاله ومداه ومقطعيه من المحورين الإحداثيين وخطوط تقاربه، وأحدّد إذا كان متزايدًا أم متناقصًا:

7 $f(x) = 7(6)^x$

8 $f(x) = 7^{-x}$

9 $f(x) = \left(\frac{1}{8}\right)^x$

10 $f(x) = (9)^x$

أمثّل كلًّا من الاقترانات الآتية، ثم أحدّد مجاله ومداه وخطّ التقارب الأفقي، وأحدّد إذا كان متزايدًا أم متناقصًا:

11 $f(x) = 7^{x-2} + 1$

12 $f(x) = \left(\frac{1}{7}\right)^{x+1} - 3$

13 $f(x) = 5\left(\frac{1}{4}\right)^{x+3} - 7$

14 $f(x) = 7(4)^{x-5} + 3$

بكتيريا: يُمثِّل الاقتران: $f(x) = 400(2)^{\frac{x}{3}}$ عدد الخلايا البكتيرية بعد x ساعة في تجربة مخبرية:

15 أجد عدد الخلايا البكتيرية عند بَدْء التجربة.

16 أجد عدد الخلايا البكتيرية بعد 12 ساعة.

17 بعد كم ساعةً يصبح عدد الخلايا البكتيرية 102400 خلية؟

خزّان: يُمثِّل الاقتران: $f(x) = 2(0.75)^x$ كمِّية الماء المُتبقِّية في خزّان (بالمتر المُكعَّب) بعد x ساعة نتيجة ثقب فيه:

18 أجد كمِّية الماء المُتبقِّية في الخزّان بعد ساعة واحدة.

19 ما الزمن الذي تصبح فيه كمِّية الماء المُتبقِّية في الخزّان $\frac{9}{8}\ m^3$ تقريبًا؟

النمو والاضمحلال الأُسِّي

Exponential Growth and Decay

استخدم 35 ألف شخص موقعًا إلكترونيًّا تعليميًّا هذه السنة، ومن المُتوقَّع أنْ يزداد هذا العدد بنسبة 2% كل سنة:

1. أكتب اقتران النمو الأُسِّي الذي يُمثِّل عدد مستخدمي الموقع بعد t سنة.
2. أجد عدد مستخدمي الموقع بعد 7 سنوات.

تلوُّث: في دراسة علمية تناولت درجة تأثير التلوُّث في عدد الأسماك التي تعيش في إحدى البحيرات، توصَّل فريق البحث إلى أنَّ عدد الأسماك في البحيرة يقلُّ بنسبة 20% كل سنة:

3. أكتب اقتران الاضمحلال الأُسِّي الذي يُمثِّل عدد الأسماك في البحيرة بعد t سنة، علمًا بأنَّ عددها عند بَدْء الدراسة هو 12000 سمكة.
4. أجد عدد الأسماك في البحيرة بعد 3 سنوات.

طب: يُمكن نمذجة المساحة A لجرح في جسم إنسان طبيعي بعد n يومًا من حدوث الجرح بالاقتران $A(n) = A_0\, e^{-0.35n}$ حيث A_0 مساحة الجرح لحظة حدوثه.

5. إذا كانت مساحة جرح لحظة حدوثه 100 mm^2 فأجد مساحة الجرح بعد 10 أيام.
6. أُمثِّل الاقتران $A(n)$ بيانيًّا.
7. أجد المقطع y لمنحنى الاقتران، وأصف مدلوله.

سيّارة: يتناقص ثمن سيّارة سعرها JD 19725 بنسبة 3% سنويًّا:

8. أكتب اقتران الاضمحلال الأُسِّي لثمن السيّارة بعد t سنة.
9. أجد ثمن السيّارة بعد 4 سنوات.

استثمر عامر مبلغ JD 8000 في شركة صناعية، بنسبة ربح مُركَّب تبلغ 5.5%، وتضاف كل شهر:

10. أكتب صيغة تُمثِّل جُمْلة المبلغ بعد t سنة.
11. أجد جُمْلة المبلغ بعد 3 سنوات.

12. أودعت ليلى مبلغ JD 60000 في حساب بنكي، بنسبة ربح مُركَّب مستمر مقدارها 6%. أجد جُمْلة المبلغ بعد 17 سنة.

الدرس 3

الاقترانات اللوغاريتمية

Logarithmic Functions

أكتب كل معادلة لوغاريتمية ممّا يأتي في صورة أُسِّية:

1. $\log_3 729 = 6$
2. $\log_5 625 = 4$
3. $\log_{64} 4 = \frac{1}{3}$
4. $\log_{64} 8 = 0.5$
5. $\log_7 1 = 0$
6. $\log_{43} 43 = 1$

أكتب كل معادلة أُسِّية ممّا يأتي في صورة لوغاريتمية:

7. $4^5 = 1024$
8. $3^{-4} = \frac{1}{81}$
9. $7^3 = 343$
10. $5^{-2} = 0.04$
11. $(32)^1 = 32$
12. $8^0 = 1$

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

13. $\log_2 64$
14. $\log_{81} 9$
15. $\log_{10} 0.0001$
16. $\log_{\frac{5}{3}} 1$
17. $\log_{\frac{1}{6}} 6$
18. $(10)^{\log_{10} \frac{1}{9}}$
19. $\log_3 \frac{1}{\sqrt{(3)^6}}$
20. $\log_b \sqrt[7]{b}$
21. $4^{\log_4 3}$

أُمثِّل كل اقتران ممّا يأتي بيانيًّا، ثم أُحدِّد مجاله ومداه ومقطعيه من المحورين الإحداثيين وخطوط تقاربه، وأحدّد إذا كان مُتزايِدًا أم مُتناقِصًا :

22. $f(x) = \log_8 x$
23. $g(x) = \log_{\frac{1}{10}} x$
24. $h(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

أمثّل كلًّا من الاقترانات الآتية بيانيًّا، ثم أحدّد مجاله ومداه وخط التقارب الرأسي، وأحدّد إذا كان متزايدًا أم متناقصًا:

25. $f(x) = \log_2 (x + 3)$
26. $f(x) = 7 + 2 \log_5 (x - 2)$
27. $f(x) = -5 \log_7 (-x)$

28. **ضوء:** تُمثِّل المعادلة: $\log_{10}\left(\frac{I}{12}\right) = -0.0125x$ العلاقة بين شِـدَّة الضـوء I بوحدة lumen والعمق x بالأمتار في إحدى البحيرات. كم تبلغ شِدَّة الضوء عند عمق 10 m؟

قوانين اللوغاريتمات

Laws of Logarithms

إذا كان: $\log_a 7 \approx 0.936$، وكان: $\log_a 3 \approx 0.528$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1. $\log_a \frac{3}{7}$
2. $\log_a 21$
3. $\frac{\log_a 3}{\log_a 7}$
4. $\log_a \frac{1}{7}$
5. $\log_a 441$
6. $\log_a \frac{49}{27}$
7. $\log_a (7a^2)$
8. $\log_a \sqrt[4]{81}$
9. $(\log_a 3)(\log_a 7)$

أكتب كل مقدار لوغاريتمي ممّا يأتي بالصورة المُطوَّلة، علمًا بأنَّ المُتغيِّرات جميعها تُمثِّل أعدادًا حقيقيةً موجبةً:

10. $\log_a x^7$
11. $\log_a \left(\frac{ac}{b}\right)$
12. $\log_a (\sqrt{x})$
13. $\log_a \left(\frac{\sqrt{xy}}{z}\right)$
14. $\log_a \frac{1}{x^3 y^4}$
15. $\log_a \sqrt[7]{128x^7}$
16. $\log_a \frac{\left(x^{-1} y^2\right)^4}{\left(x^5 y^{-2}\right)^3}$
17. $\log_a \sqrt{\frac{x^2 y^3}{z^3}}$
18. $\log_a (x-y+z)^9,\ y-x<z$

أكتب كل مقدار لوغاريتمي ممّا يأتي بالصورة المُختصَرة، علمًا بأنَّ المُتغيِّرات جميعها تُمثِّل أعدادًا حقيقيةً موجبةً:

19. $\log_a x - \log_a y$
20. $\log_b (b-1) + 2\log_b b,\ b > 1$
21. $\log_a \sqrt{x} - \log_a \frac{1}{\sqrt{x}}$
22. $\log_a (x^2 - 25) - \log_a (x+5),\ x > 5$
23. $3\log_b 1 - \log_b b$
24. $8\log_b x + 4\log_b y - \frac{1}{2}\log_b z$

25. **إيـرادات:** يُمثِّل الاقتران: $T(a) = 10 + 20\log_6 (a+1)$ مبيعات شـركة (بآلاف الدنانيـر) من مُنتَج جديد، حيث a المبلغ (بآلاف الدنانير) الذي تُنفِقه الشـركة على إعلانات المُنتَج، و$a \geq 0$. وتعنـي القيمة: $T(1) \approx 17.7$ أنَّ إنفاق JD 1000 على الإعلانات يُحقِّق إيرادات قيمتها JD 17700 من بيع المُنتَج. أجد قيمة إيرادات الشـركة بعد إنفاقها مبلغ 11 ألف دينار على الإعلانات، علمًا بأنَّ $\log_6 2 \approx 0.3869$.

المعادلات الأُسِّية واللوغاريتمية

Exponential and Logarithmic Equations

أستعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كلٍّ ممّا يأتي، مع تقريب إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة:

1. $\log 17$
2. $\log(1.5 \times 10^{-4})$
3. $\ln 2.3$
4. $\log_2 15$
5. $\log_5 e^7$
6. $\ln 7$

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي، وأقرّب إجابتي إلى أقرب جزء من مئة (إنْ لزم):

7. $\log_5 27$
8. $\log_{\frac{1}{4}} 19$
9. $\log_7 8$
10. $\log_8 \frac{1}{8}$
11. $\log 10000$
12. $\log_3 18$

أحُلُّ المعادلات الأُسِّية الآتية، وأقرّب إجابتي إلى أقرب 4 منازل عشرية:

13. $5^x = 120$
14. $-4e^{4x} = -64$
15. $3^{2x+1} = 7^{5x}$
16. $64^x + 2(8^x) - 3 = 0$
17. $7(4)^x = 49$
18. $21^{x-1} = 3^{7x+1}$

أحلّ المعادلات اللوغاريتمية الآتية:

19. $\log_x(216) = 3$
20. $\log_x(4) = \frac{1}{2}$
21. $\log_x(27) = 1.5$
22. $\log_3(x^2 - 15) = \log_3(2x)$
23. $\log_2(x^2 - 4) = \log_2(3x)$
24. $\log_{x-1}(1024) = 5$

25. **زلازل:** تُستعمل المعادلة $P = \log_{\frac{2}{3}} \frac{E}{11.81}$ لنمذجة العلاقة بين قوة الزلزال P على مقياس ريختر والطاقة E الناتجة عنه بوحدة الجول. أحسبُ الطاقة الناتجة عن زلزال قوته 8.1 درجات على مقياس ريختر.

أرانب: توصَّلت دراسة إلى أنَّ عدد الأرانب في محمية طبيعية يتزايد وَفق الاقتران: $N(t) = \frac{2000}{1 + 3e^{-0.05t}}$، حيث N عدد الأرانب في المحمية بعد t سنة:

26. أجد عدد الأرانب في المحمية عند بَدْء الدراسة.
27. بعد كم سنةً يصبح عدد الأرانب في المحمية 700 أرنب؟